Het schaakbord van koning Shirham

Dion Gijswijt

De Indiase koning Shirham wilde volgens een oud verhaal de uitvinder van het schaakbord, Sissa ben Dahir, rijkelijk belonen voor zijn uitzonderlijke prestatie. Op de vraag van de koning welke beloning hij voor zijn uitvinding zou wensen, antwoordde de slimme Sissa: “Majesteit, geef me één graankorrel om op het eerste vakje te leggen, twee om op het tweede vakje te leggen, vier om op het derde vakje te leggen, acht om op het vierde vakje te leggen, en laat mij zo, O koning, elk van de vierenzestig vakjes van het schaakbord bedekken.” De koning was stomverbaasd over zo’n bescheiden verzoek, niet meer dan een handvol rijst voor deze geweldige uitvinding!

Wat is de beloning?

Als de koning zijn hofwiskundige erbij zou hebben gehaald, zou hij waarschijnlijk niet meer zo blij zijn met het voorstel van Sissa. Laten we eens nagaan om hoeveel rijst Sissa heeft durven vragen. Op het eerste vakje ligt slechts een rijstkorrel. Het aantal rijstkorrels op elk volgende vakje is steeds het dubbele van het aantal op het vorige vakje. In totaal vraagt Sissa om $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{63}$. Je mag zelf nagaan dat dit gelijk is aan $2^{64} - 1$, of uitgeschreven: 18.446.744.073.709.551.615 rijstkorrels. Neem om een idee van deze hoeveelheid rijst te krijgen even aan dat er 50 rijstkorrels in een kubieke centimeter gaan. We hebben dus te maken met een berg van meer dan 3×10^{17} kubieke centimeter, ofwel driehonderdmiljard kubieke meter rijst. Hiermee zouden we belgië en nederland met een meters dikke laag rijst kunnen bedekken. Misschien was Sissa toch niet zo bescheiden.

VRAAG. Als Sissa alleen rijst zou hebben gevraagd voor de zwarte velden van het schaakbord: 1 rijstkorrel voor het eerste zwarte veld, 2 voor het tweede zwarte veld, 4 voor het derde en zo verder, zou hij dan een redelijke beloning hebben geëist? Is het aantal rijstkorrels dan meer of minder dan het aantal seconden in een mensenleven (ongeveer 75,2 jaar)?

VRAAG. Een banketbakker maakt 10 soorten bonbons, elke soort in melkchocolade, wit en puur. Hij heeft doosjes met 10 bonbons gemaakt. In elk doosje heeft hij van elke soort bonbon óf de pure óf de melkchocolade-variant gestopt. Zo heeft hij verschillende doosjes kunnen samenstellen, en hij heeft iedere combinatie precies eenmaal gemaakt. Als reclamestunt stopt hij nu in elk doosje nog een extra witte bonbon. Op hoeveel manieren kan hij dat doen?

OPGAVE 1. Pak een flink vel papier. Vouw het papier dubbel en herhaal dat in totaal tien keer. Probeer eventueel een groter of een dunner vel papier. Kun je je resultaten verklaren?

Machtsverheffen

In het verhaal van Sissa verdubbelt het aantal korrels rijst bij ieder volgende vakje

van het schaakbord en je hebt gezien dat de aantallen op die manier razend snel groeien. Al gauw wordt het ondoenlijk om de getallen voluit op te schrijven. Om het antwoord op het banketbakker vraagstuk op te schrijven, heb je al een halve bladzijde nodig. Veel handiger is het om de getallen als macht te noteren: $2 \times 2 \times 2 \times 2$ wordt afgekort tot 2^4 en $2 \times 2 \times \ldots \times 2$ (64 keer) tot 2^{64}.
Zoals je weet, kun je met machten rekenen door de volgende drie rekenregels te gebruiken:

1. $a^n \times a^m = a^{n+m}$,
2. $(a^n)^m = a^{nm}$ en
3. $a^n \times b^n = (ab)^n$.

Deze regels kun je gebruiken om bijvoorbeeld te berekenen welk van de getallen 3^{800} en 8^{300} groter is. Schrijf het eerste getal maar als $3^{2\times 400} = (3^2)^{400} = 9^{400}$. Dit is groter dan 9^{300} en dat is weer groter dan 8^{300}. Dus het eerste getal is de grootste van de twee.

VRAAG. Wat is groter, 2^{30} of 3^{20}?

OPGAVE 2. Zet de volgende zes getallen op volgorde van klein naar groot:
$2^{(3^4)}$, $2^{(4^3)}$, $3^{(2^4)}$, $3^{(4^2)}$, $4^{(2^3)}$ en $4^{(3^2)}$.

Haakjes zetten

Het is je misschien wel opgevallen dat het bij torentjes getallen, zoals die uit opgave 2, veel uitmaakt waar je de haakjes zet. Zo is $2^{(3^4)}$ gelijk aan 2^{81}, maar $(2^3)^4$ is gelijk aan 2^{12}. Als er in zo'n torentje geen haakjes worden gezet, wordt daar altijd mee bedoeld dat je van rechts naar links werkt, dus $a^{b^{c^d}} = a^{(b^{(c^d)})}$.

OPGAVE 3. Zet de volgende getallen op volgorde van groot naar klein: $((3^3)^3)^3$, $(3^3)^{(3^3)}$, $(3^{(3^3)})^3$, $3^{((3^3)^3)}$ en $3^{(3^{(3^3)})}$.

OPGAVE 4. Wat is het grootste getal dat je met negen negens kunt maken als je mag optellen, vermenigvuldigen, machtsverheffen en haakjes zetten?

Als je de getallen uit opgave 3 probeert uit te rekenen, dan zal je merken dat je deze vaak niet meer voluit kunt opschrijven. Toch kun je soms nog wel uitrekenen hoeveel cijfers zo'n getal heeft en wat de eerste cijfers van dat getal zijn. Als voorbeeld nemen we het getal 7^{7^7}, een torentje van drie zevens. We berekenen hiervan de logarithme: $\log(7^{7^7}) = 7^7 \times \log(7) = 695.974,5752\ldots$. We weten nu dat $7^{7^7} = 10^{695.974,5752\ldots} = 10^{695.974} \times 10^{0,5752\ldots} = 10^{695.974} \times 3,76\ldots$. Het getal heeft dus 695.975 cijfers en de eerste twee cijfers zijn 3 en 7.

OPGAVE 5. Bereken het aantal cijfers van het grootste bekende priemgetal: $2^{6972593} - 1$. Bereken ook het eerste cijfer. Kun je ook het laatste cijfer bepalen?

18 446 744 073 709 551 615	Het aantal rijstkorrels op het schaakbord.
43 252 003 274 489 856 000	Het aantal verschillende standen dat met Rubiks kubus is te bereiken.
2 235 197 406 895 366 368 301 560 000	De inverse van de kans dat bij bridge alle vier spelers een volledige kleur krijgen toegedeeld.
11 . . . 11 (317 enen)	Het grootst bekende priemgetal dat uit slechts enen bestaat.
10^{1024}	Het antwoord op het banketbakker-vraagstuk.
$2^{6.972.593} - 1$	Het grootste bekende priemgetal.
9^{9^9}	Dit getal heeft 369 693 100 cijfers.

Miljoen	10^6
Miljard	10^9
Biljoen	10^{12}
Biljard	10^{15}
Triljoen	10^{18}
Triljard	10^{21}
Quadriljoen	10^{24}
Quintiljoen	10^{30}
Sextiljoen	10^{36}
Septiljoen	10^{42}
Octiljoen	10^{48}
Noniljoen	10^{54}
Deciljoen	10^{60}
Vigintiljoen	10^{120}
Centiljoen	10^{600}

Referenties:

Woordenboek van eigenaardige en merkwaardige getallen, David Wells.
http://home.earthlink.net/ mrob/largenum.html
http://www.mersenne.org/prime.html